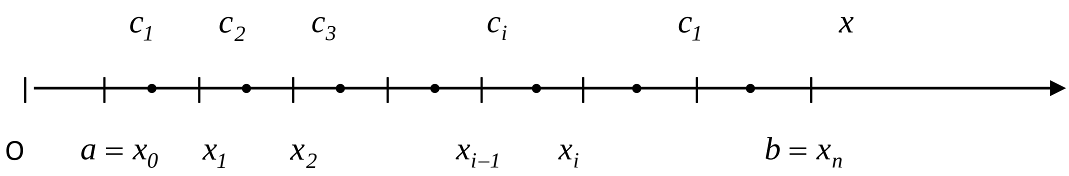
Лекция 14. Анықталған интеграл.

Анықталған интегралдың анықтамасы. $y=f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде анықталсын, мұнда $a<b$. Төменгі амалдарды орындаймыз.

1. $x_0=a, x_1, x_2, \ldots, x_n=b$ $(x_0<x_1<\ldots<x_n)$ нүктелерімен $[a,b]$ кесіндісін n ***элементар кесінділерге*** (бөліктерге) бөлеміз: $[x_0;x_1],[x_1;x_2],\ldots,[x_{n-1};x_n]$



2. Әрбір $[x_{i-1};x_i]$, $i=1,2,\ldots,n$ элементар кесіндінің ішінде жатқан, кез келген бір $c_i\in[x_{i-1};x_i]$ нүктесін аламыз және осы нүктедегі функцияның мәнін есептейміз, яғни $f(c_i)$ шамасын табамыз.

3. Функцияның табылған $f(c_i)$ мәндерін сәйкес элементар кесінділердің ұзындығына, яғни $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ көбейтеміз: $f(c_i)\cdot\Delta x_i$.

4. Барлық осындай көбейтінділердің S_n қосындысын құрамыз:

$$S_n=f(c_1)\Delta x_1+f(c_2)\Delta x_2+\ldots+f(c_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i \qquad (14.1)$$

(14.1) қосындысы $y=f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі ***интегралдық қосындысы*** деп аталады. Элементар кесінділердің ең үлкен ұзындығын λ деп белгілейміз: $\lambda=max\,\Delta x_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

5. $n\to\infty$ ұмтылғанда, яғни $\lambda\to 0$ ұмтылғанда (14.1) интегралдық қосындысының шегін табамыз. Егер (14.1)- интегралдық қосындысы үшін ақырлы шек бар болып, ол $[a,b]$ кесіндісін дербес бөліктерге бөлу жолына және c_i нүктелерін таңдап алу тәсіліне тәуелсіз болса, онда ол шекті $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі ***анықталған интегралы*** деп атайды және оны $\int_a^b f(x)dx$ символымен белгілейді. Сонымен,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i$$

Мұндағы a санын интегралдың төменгі шегі, ал b санын — жоғары шегі дейді. $f(x)$— интеграл астындағы функция, $f(x)dx$ —интеграл астындағы өрнек деп аталады.

Егер $\int_a^b f(x)dx$ саны бар болса, онда $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын функция деп аталады. Енді анықталған интегралдың бар болуы туралы теореманы келтірейік.

Теорема (Коши). Егер $y=f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда оның осы аралықта анықталған интегралы $\int_a^b f(x)dx$ бар. Егер $y=f(x)$ функциясының $[a,b]$ аралығында санаулы бірінші текті үзіліс нүктелері болса, онда бұл функция $[a,b]$ аралығында интегралданады.

Анықталған интегралдың анықтамасынан шығатын оның кейбір қасиеттері:

1. Анықталған интеграл өзінің интегралдау айнымаласына тәуелді емес, ол тек интегралдың шектері мен $f(x)$ функциясынан тәуелді, яғни $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \ldots \int\limits_a^b f(z)dz$,

2. Егер $b = a$ болса, онда $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

3. Кез келген нақты C саны үшін: $\int\limits_a^b Cdx = C(b-a)$

Анықталған интегралдың қасиеттері. Бұл бөлімде интегралданатын функцияларды қарастырамыз.

1. $\int\limits_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$, мұнда C - нақты сан.

2. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(t)dt$

4. Егер $a < c < b$ теңсіздігі орындалса, онда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

5. Егер $[a,b]$ кесіндісінде $f(x) \le g(x)$ болса, онда $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$.

Орта мән туралы теорема. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда $[a,b]$ кесіндісінен $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ теңдігі орындалатындай c саны табылады.

Ньютон – Лейбниц формуласы. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын болса, онда ол осы кесіндінің ішінде жатқан кез келген $[a,x]$ кесіндісінде де интегралданады. $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, мұнда $x \in [a,b]$ функциясын қарастыралық.

Теорема. Егер $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда $\Phi(x)$ функциясы да $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болады.

Теорема. $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болсын. Онда

$$\Phi'(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$$

Салдар. $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болған кез келген $f(x)$ функциясының осы кесіндіде алғашқы функциясы бар, ол $\Phi(x)$ функциясына тең. Енді интегралды есептеудің негізгі формуласы Ньютон – Лейбниц формуласына көшелік.

Негізгі теорема. $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және $y = F(x)$ оның осы кесіндідегі алғашқы функциясы болсын. Онда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (14.2)$$

(14.2) формуласы ***Ньютон- Лейбниц формуласы*** деп аталады. Ньютон-Лейбниц формуласы анықталған интегралды есептеу үшін өте қолайлы құрал. Оны қолдану үшін интеграл астындағы жатқан функцияның бір алғашқы функциясын білу жеткілікті.

1-мысал. $\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{8}{3}$.

Анықталған интегралда айнымалыны алмастыру.

Теорема. $x = \varphi(t)$ функциясының $[\alpha, \beta]$ кесіндісінде үзіліссіз туындысы бар және $a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta)$ болсын, ал $y = f(x)$ функциясы $x = \varphi(t),\ t \in [\alpha, \beta]$ түрінде берілген әрбір x нүктесінде үзіліссіз болсын. Сонда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (14.3)$$

теңдігі әрқашанда орындалады.

(14.3) формуласы анықталған интеграл үшін ***айнымалыны алмастыру формуласы*** деп аталады.

2- мысал. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ интегралын есептеу керек.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| x = \sin t, dx = \cos t dt; x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow \ \sin t = 1 \Rightarrow \left(t = \frac{\pi}{2}\right)\right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt =$$

$$\frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Анықталған интегралды бөліктеп интегралдау.

Теорема. $u = u(x)$ және $v = v(x)$ функцияларының $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз туындылары бар болсын.

Онда $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$.

Бұл теңдікті қысқаша түрде былай да жазуға болады

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du \qquad (14.4)$$

(14.4) анықталған интегралды ***бөліктеп интегралдау формуласы*** деп аталады.

3–мысал. $\int_1^e x\ln x dx=\int_1^e \ln x d\frac{x^2}{2}=\left|u=\ln x, du=\frac{1}{x}dx, v=\frac{x^2}{2}\right|=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=$

$$=\frac{e^2}{2}\ln e-0-\int_1^e\frac{x}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}.$$